数理解析研究所講究録
526巻 1984年 96-104

ブロック効果をもつ分解能 $(2\ell+1)^*$ の釣合い型一部実施 2^m 要因計画について

広島大・総合　来田正秀

§1. 序

強さ 2ℓ, 大きさ N, 因子数 m, 水準数 2, 指標集合 $\{\mu_0, \mu_1, \cdots \mu_{2\ell}\}$ の均斉配列 ($BA(N, m, 2, 2\ell)\{\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_{2\ell}\}$) と分解能 $(2\ell+1)$ の釣合い型一部実施 2^m 要因計画 (2^m-BFFD) の関係は, 山本, 白倉, 来田 [4] によって求められた。また三角型多次元部分釣合い (TM-DPB) アソシエーションスキームとその代数を用いて, 分解能 $(2\ell+1)$ の 2^m-BFFD に基く情報行列の固有多項式が, 高々 $(\ell+1)$ 次の行列式の積で求められた [5]。現在, 奇数あるいは偶数分解能の BFFD についての多くの研究がなされている。

本稿では, 計画 T が $T' = [T_1'; \cdots; T_r']$ である場合について考える。ただし, T_k $(k=1, 2, \cdots, r)$ は $BA(N_k, m, 2, 2\ell)\{\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \cdots, \mu_{2\ell}^{(k)}\}$ であり, A' は行列 A の転置を示す。

§2. ブロック効果をもつ 2^m-BFFD

N 個の処理組合せをもつ計画 T を $T' = [T_1'; \cdots; T_r']$ とする。ただし, T_k $(k=1, 2, \cdots, r)$ は $BA(N_k, m, 2, 2\ell)\{\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \cdots, \mu_{2\ell}^{(k)}\}$

である。このときTは明らかに$BA(N,m,2,2\ell)\{\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_{2\ell}\}$となる。ただし，$N=\sum_{k=1}^{r}N_k$，$\mu_i=\sum_{k=1}^{r}\mu_i^{(k)}$ $(i=0,1,\cdots,2\ell)$である。

Tに基くつぎの模型を考える：

(2.1) $\quad \underline{y}(T)=E_T\underline{\theta}+\Phi\underline{b}+\underline{e}_T,$

ただし，$\underline{y}(T)'=(\underline{y}(T_1)',\cdots,\underline{y}(T_r)')$，$E_T'=[E_1';\cdots;E_r']$，$\underline{\theta}'=(\theta_\phi;\{\theta_t\};\cdots;\{\theta_{t_1\cdots t_\ell}\})$ $(=(\theta_\phi,\underline{\theta}^{*\prime}))$，$\Phi=\mathrm{diag}[\underline{j}_{N_1};\cdots;\underline{j}_{N_r}]$，$\underline{b}'=(b_1,\cdots,b_r)$，$\underline{e}_T'=(\underline{e}_1',\cdots,\underline{e}_r')$である。ここで，$\underline{y}(T_k)$，$E_k$，$b_k$，$\underline{e}_k$ $(k=1,2,\cdots,r)$は各々T_kに基く$N_k\times 1$の観測値ベクトル，$N_k\times\nu_\ell$の計画行列，ブロック効果，$N_k\times 1$の誤差ベクトル，$\nu_\ell=1+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\cdots+\binom{m}{\ell}$である。さらに誤差ベクトル$\underline{e}_T$について，$\mathcal{E}[\underline{e}_T]=\underline{0}$，$\mathrm{Var}[\underline{e}_T]=\sigma^2\times\mathrm{diag}[(1/\tau_1)I_{N_1};\cdots;(1/\tau_r)I_{N_r}]$ $(=\sigma^2D_\tau^{-1})$で，σ^2は未知であるが，$\tau_k\,(>0)$は既知と仮定する。

<u>定義</u>　$\underline{\theta}^*$が推定可能な計画を分解能$(2\ell+1)^*$という。

ブロック効果を除去して得られる$\underline{\theta}^*$を推定するための正規方程式は

(2.2) $$\begin{bmatrix}0 & \underline{0}'\\ \underline{0} & M_T^*\end{bmatrix}\widehat{\begin{bmatrix}\theta_\phi\\ \underline{\theta}^*\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}0\\ \underline{y}^*(T)\end{bmatrix}$$

で与えられる。ただし

$$M_T^*=E_T^{*\prime}D_\tau^{1/2}\{I_N-\Phi(\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'\}D_\tau^{1/2}E_T^*$$

$$= \sum_{k=1}^{r} [\tau_k E_k^{*\prime} \{ I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k} \} E_k^{*}] ,$$

(2.3)
$$y^{*}(T) = E_T^{*\prime} D_\tau^{1/2} \{ I_N - \Phi(\Phi'\Phi)^{-1}\Phi' \} D_\tau^{1/2} y(T)$$
$$= \sum_{k=1}^{r} [\tau_k E_k^{*\prime} \{ I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k} \} y(T_k)]$$

である。ここで $D_\tau^{1/2} = diag\,[\sqrt{\tau_1} I_{N_1} ; \cdots ; \sqrt{\tau_r} I_{N_r}]$ で、E_T^{*}, E_k^{*} は各々 E_T, E_k の才１列を取り除いた $N \times (\nu_\ell - 1)$, $N_k \times (\nu_\ell - 1)$ の行列である。

(2.2) において，M_T^{*} が正則であるならば，$\underline{\theta}^{*}$ の推定値 $\hat{\underline{\theta}}^{*}$ は

(2.4) $\hat{\underline{\theta}}^{*} = V_T^{*} y^{*}(T)$

で与えられる。ただし，$V_T^{*} = (M_T^{*})^{-1}$ である。

<u>定理 2.1.</u> $T' = [T_1' ; \cdots ; T_r']$ を分解能 $(2\ell+1)^{*}$ の 2^m-BFFD とする。ただし T_k $(k=1,2,\cdots,r)$ は $BA(N_k, m, 2, 2\ell)$ $\{\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \cdots, \mu_{2\ell}^{(k)}\}$ である。このとき，$\underline{\theta}^{*}$ の推定値 $\hat{\underline{\theta}}^{*}$ について

$$\mathcal{E}[\hat{\underline{\theta}}^{*}] = \underline{\theta}^{*}, \quad Var[\hat{\underline{\theta}}^{*}] = \sigma^2 V_T^{*}$$

となる。

<u>証明</u>. $\{ I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k} \} j_{N_k} = \underline{0}$ なので，

$$\mathcal{E}[\hat{\underline{\theta}}^{*}]$$
$$= V_T^{*} [\sum_{k=1}^{r} \tau_k E_k^{*\prime} \{ I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k} \} \{ \mathcal{E}[y(T_k)] \}]$$
$$= V_T^{*} [\sum_{k=1}^{r} \tau_k E_k^{*\prime} \{ I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k} \} \{ [j_{N_k} ; E_k^{*}] \begin{bmatrix} \theta_\phi \\ \underline{\theta}^{*} \end{bmatrix} + b_k j_{N_k} \}]$$
$$= V_T^{*} [\sum_{k=1}^{r} \tau_k E_k^{*\prime} \{ I_{N_k} - (1/N_k) G_{N_k} \} E_k^{*}] \underline{\theta}^{*}$$
$$= \underline{\theta}^{*}$$

となる。また $\{I_N - \Xi(\Xi'\Xi)^{-1}\Xi'\}$ は巾等行列なので

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}^*] \\
&= \mathbf{V}_T^* \,\mathrm{Var}[\boldsymbol{y}^*(T)]\,\mathbf{V}_T^* \\
&= \mathbf{V}_T^*[E_T^{*\prime} D_\tau^{1/2}\{I_N - \Xi(\Xi'\Xi)^{-1}\Xi'\}D_\tau^{1/2}]\,\mathrm{Var}[\boldsymbol{y}(T)] \\
&\quad \times [D_\tau^{1/2}\{I_N - \Xi(\Xi'\Xi)^{-1}\Xi'\}D_\tau^{1/2} E_T^*]\mathbf{V}_T^* \\
&= \sigma^2 \mathbf{V}_T^*[E_T^{*\prime} D_\tau^{1/2}\{I_N - \Xi(\Xi'\Xi)^{-1}\Xi'\}D_\tau^{1/2} D_\tau^{-1} D_\tau^{1/2} \\
&\quad \times \{I_N - \Xi(\Xi'\Xi)^{-1}\Xi'\}D_\tau^{1/2} E_T^*]\mathbf{V}_T^* \\
&= \sigma^2 \mathbf{V}_T^*[E_T^{*\prime} D_\tau^{1/2}\{I_N - \Xi(\Xi'\Xi)^{-1}\Xi'\}D_\tau^{1/2} E_T^*]\mathbf{V}_T^* \\
&= \sigma^2 \mathbf{V}_T^*
\end{aligned}
$$

となる。

<u>系</u>　定理2.1の計画 T について，$\tau_1 = \cdots = \tau_r\ (=1)$ ならば

$$\mathrm{Var}[\hat{\boldsymbol{\theta}}^*] = \sigma^2\left[\sum_{k=1}^{r} E_k^{*\prime}\{I_{N_k} - (1/N_k)G_{N_k}\}E_k^*\right]^{-1}$$

である。

§3. 共分散行列の固有多項式

この章では，計画 T に基く $\boldsymbol{\theta}^*$ の推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ の共分散行列の固有多項式を求める。

<u>補題3.1.</u>　計画 $T_k\ (k=1,2,\cdots,r)$ を $BA(N_k, m, 2, 2l)\{\mu_0^{(k)}, \mu_1^{(k)}, \cdots, \mu_{2l}^{(k)}\}$ とする。このとき

$$L^{*\prime}[E_k^{*\prime}\{I_{N_k} - (1/N_k)G_{N_k}\}E_k^*]L^*$$

$$= \mathrm{diag}\,[\,K_0^*(k);\ \underbrace{K_1^*(k),\cdots,K_1^*(k)}_{\phi_1};\ \cdots\ ;\ \underbrace{K_\ell^*(k),\cdots,K_\ell^*(k)}_{\phi_\ell}\,]$$

なる $(\nu_\ell-1)\times(\nu_\ell-1)$ の直交行列 L^* が存在する。ただし，$K_0^*(k)$ $=\|\kappa_0^{*i,j}(k)\|$ $(\ell\times\ell)$，$K_\gamma^*(k)=\|\kappa_\gamma^{*u,v}(k)\|$ $(\ell-\gamma+1)\times(\ell-\gamma+1)$ で

$$\kappa_0^{*i,j}(k)=\sum_{\alpha=0}^{i}\gamma^{(k)}_{j-i+2\alpha}\,z^{(i,j)}_{0\alpha}-\sqrt{\binom{m}{i}\binom{m}{j}}\,\gamma_i^{(k)}\gamma_j^{(k)}\Big/\gamma_0^{(k)}$$

(3.1) $$(1\leqq i\leqq j\leqq\ell),$$

$$\kappa_\gamma^{*u,v}(k)=\sum_{\alpha=0}^{\gamma+u}\gamma^{(k)}_{v-u+2\alpha}\,z^{(\gamma+u,\gamma+v)}_{\gamma\alpha}$$

$$(0\leqq u\leqq v\leqq \ell-\gamma\ ;\ \gamma=1,2,\cdots,\ell).$$

であり

$$\gamma_i^{(k)}=\sum_{j=0}^{2\ell}\sum_{p=0}^{i}(-1)^p\binom{i}{p}\binom{2\ell-i}{j-i+p}\mu_j^{(k)}\qquad(i=0,1,\cdots,2\ell),$$

(3.2) $$z^{(u,v)}_{\beta\alpha}=\sum_{b=0}^{\alpha}(-1)^{\alpha-b}\frac{\binom{u-\beta}{b}\binom{u-b}{u-\alpha}\binom{m-u-\beta+b}{b}\left\{\binom{m-u-\beta}{v-u}\binom{v-\beta}{v-u}\right\}^{1/2}}{\binom{v-u+b}{b}}$$

$$(0\leqq\alpha,\beta\leqq u\leqq v\leqq\ell),$$

$$\phi_\beta=\binom{m}{\beta}-\binom{m}{\beta-1}\qquad(\beta=0,1,\cdots,\ell)$$

である。

証明. 一般平均 μ を除いた ℓ-因子交互作用までの要因効果の間に定義されるTMDPBアソシエーション代数を用いて容易に証明できる。

定理3.1. 分解能 $(2\ell+1)^*$ の 2^m-BFFD，$T=[T_1';\cdots;T_r']$ に基く V_T^* の固有多項式 $\psi(x)$ は

(3.3) $$\psi(x)=[\det\{(K_0^*)^{-1}-xI_\ell\}]\prod_{\gamma=1}^{\ell}[\det\{(K_\gamma^*)^{-1}-xI_{\ell-\gamma+1}\}]^{\phi_\gamma}$$

で与えられる。ただし，T_k はBA$(N_k,m,2,2\ell)\{\mu_0^{(k)},\mu_1^{(k)},\cdots,\mu_{2\ell}^{(k)}\}$

で，$K^*_\rho = \sum_{k=1}^{r} \{\tau_k K^*_\rho(k)\}$ $(\rho = 0, 1, \cdots, l)$ である．

証明．　(2.3)と補題3.1より容易に求まる．

系．　定理3.1の計画Tについて，$\tau_1 = \cdots = \tau_r\ (=1)$ ならば，V^*_Tの固有多項式$\xi(x)$は

$$\xi(x) = [\det\{(K^{**}_0)^{-1} - xI_l\}] \prod_{\gamma=1}^{l} [\det\{(K^{**}_\gamma)^{-1} - xI_{l-\gamma+1}\}]^{\phi_\gamma}$$

で与えられる。ただし，$K^{**}_\rho = \sum_{k=1}^{r} K^*_\rho(k)$ $(\rho = 0, 1, \cdots, l)$である．

定理3.2．　定理3.1の計画Tに対して，

$$(3.4)\quad \begin{aligned} \mathrm{tr}(V^*_T) &= \sum_{\rho=0}^{l} \phi_\rho [\mathrm{tr}\{(K^*_\rho)^{-1}\}], \\ \det(V^*_T) &= \prod_{\rho=0}^{l} [\det\{(K^*_\rho)^{-1}\}]^{\phi_\rho} \end{aligned}$$

である。

系．　定理3.1の計画Tについて，$\tau_1 = \cdots = \tau_r\ (=1)$ならば

$$(3.5)\quad \begin{aligned} \mathrm{tr}(V^*_T) &= \sum_{\rho=0}^{l} \phi_\rho [\mathrm{tr}\{(K^{**}_\rho)^{-1}\}], \\ \det(V^*_T) &= \prod_{\rho=0}^{l} [\det\{(K^{**}_\rho)^{-1}\}]^{\phi_\rho} \end{aligned}$$

である。

例．　T_1をBA(9,4,2,4){0,1,0,1,1}，T_2をBA(11,4,2,4){1,0,1,1,0}とする。このT_1，T_2は各々分解能IV，Vの2^4-BFFDである（白倉[1]，Srivastava & Chopra [3]）。(3.2)より$\gamma^{(1)}_0 = 9$，$\gamma^{(1)}_1 = \gamma^{(1)}_2 = \gamma^{(1)}_3 = 1$，$\gamma^{(1)}_4 = -7$，$\gamma^{(2)}_0 = 11$，$\gamma^{(2)}_1 = 1$，$\gamma^{(2)}_2 = -1$，$\gamma^{(2)}_3 = -3$，$\gamma^{(2)}_4 = 3$となる。ここで$\tau_1 = \tau_2 = 1$とすると

$$K_0^{**}=\begin{bmatrix}\frac{1900}{99} & -\frac{4\sqrt{6}}{99}\\ * & \frac{1464}{99}\end{bmatrix},\quad K_1^{**}=\begin{bmatrix}20 & 4\sqrt{2}\\ * & 24\end{bmatrix},\quad K_2^{**}=[16]$$

なので，$(K_0^{**})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{366}{7024} & \frac{\sqrt{6}}{7024}\\ * & \frac{475}{7024}\end{bmatrix}$，$(K_1^{**})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{6}{112} & -\frac{\sqrt{2}}{112}\\ * & \frac{5}{112}\end{bmatrix}$，$(K_2^{**})^{-1}=\left[\frac{1}{16}\right]$

となる。よって (3.5) より

$$\mathrm{tr}(V_T^*)=\frac{39981}{77264}\fallingdotseq 0.51746$$

$$\det(V_T^*)=\frac{1355193}{(7024)^2\times(11)^{11}}\fallingdotseq 0.96275\times 10^{-13}$$

となる。

§4. 2^m-BFFDの存在条件

Tを$BA(N,m,2,2\ell)\{\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_{2\ell}\}$とするとき，分解能$(2\ell+1)$の$2^m$-BFFDが存在するための必要条件は，白倉，来田[2]によって与えられている。ここでは分解能$(2\ell+1)^*$の2^m-BFFD，$T'=[T_1';\cdots;T_r']$の存在条件を求める。

<u>定理4.1.</u>　$T'=[T_1';\cdots;T_r']$を$BA(N,m,2,2\ell)\{\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_{2\ell}\}$とする。ただし，$T_k$は$BA(N_k,m,2,2\ell)\{\mu_0^{(k)},\mu_1^{(k)},\cdots,\mu_{2\ell}^{(k)}\}$で，$N=\sum_{k=1}^{r}N_k$，$\mu_i=\sum_{k=1}^{r}\mu_i^{(k)}$ $(i=0,1,\cdots,2\ell)$である。このとき計画Tが存在するための必要条件は，K_β^* $(\beta=0,1,\cdots,\ell)$が半正値行列になることである。

<u>定理4.2.</u>　定理4.1の配列Tについて，Tが分解能$(2\ell+1)^*$になるための必要十分条件は，K_β^* $(\beta=0,1,\cdots,\ell)$が正値

行列になることである。

(3.1)と定理4.2より次の定理が成立つ(e.g., 白倉,来田[2])：

定理4.3. Tを定理4.1で与えられる配列とする。このとき，Tが分解能$(2\ell+1)^*$の2^m-BFFDになるための必要条件は次の不等式を満たすことである：

$$\sum_{k=1}^{r} \mu_\ell^{(k)} > 0,$$

$$\sum_{k=1}^{r} \tau_k \left[(m-2\ell+2)(\mu_{\ell-1}^{(k)}+\mu_{\ell+1}^{(k)}) - 2(m-2\ell)\mu_\ell^{(k)} \right] > 0 \qquad (\ell \geqq 2),$$

$$\sum_{k=1}^{r} \tau_k \left\{ (m-2\ell+4)(\mu_{\ell-2}^{(k)}+\mu_{\ell+2}^{(k)}) + 4(\mu_{\ell-1}^{(k)}+\mu_{\ell+1}^{(k)}) - 2(m-2\ell)\mu_\ell^{(k)} \right\} > 0$$
$$(\ell \geqq 3),$$

$$\sum_{k=1}^{r} \tau_k \Big[\binom{m-2\ell+4}{2}(\mu_{\ell-2}^{(k)}+\mu_{\ell+2}^{(k)}) - 2(m-2\ell)(m-2\ell+3)(\mu_{\ell-1}^{(k)}+\mu_{\ell+1}^{(k)})$$
$$+ \{3(m-2\ell)^2+5(m-2\ell)+4\}\mu_\ell^{(k)} \Big] > 0 \qquad (\ell \geqq 3),$$

$$\sum_{k=1}^{r} \tau_k \Big\{ (m-2\ell+6)(\mu_{\ell-3}^{(k)}+\mu_{\ell+3}^{(k)}) + 2(m-2\ell+8)(\mu_{\ell-2}^{(k)}+\mu_{\ell+2}^{(k)})$$
$$-(m-2\ell-10)(\mu_{\ell-1}^{(k)}+\mu_{\ell+1}^{(k)}) - 4(m-2\ell)\mu_\ell^{(k)} \Big\} > 0 \qquad (\ell \geqq 4),$$

$$\sum_{k=1}^{r} \tau_k \Big[2\binom{m-2\ell+6}{2}(\mu_{\ell-3}^{(k)}+\mu_{\ell+3}^{(k)}) - 2(m-2\ell+5)(m-2\ell-2)(\mu_{\ell-2}^{(k)}+\mu_{\ell+2}^{(k)})$$
$$-\{(m-2\ell)^2+11(m-2\ell)-2\}(\mu_{\ell-1}^{(k)}+\mu_{\ell+1}^{(k)}) + 4\{(m-2\ell)^2+3(m-2\ell)$$
$$+6\}\mu_\ell^{(k)} \Big] > 0 \qquad (\ell \geqq 4),$$

$$\sum_{k=1}^{r} \tau_k \Big[6\binom{m-2\ell+6}{3}(\mu_{\ell-3}^{(k)}+\mu_{\ell+3}^{(k)}) - 6(m-2\ell)(m-2\ell+4)(m-2\ell+5)$$
$$\times(\mu_{\ell-2}^{(k)}+\mu_{\ell+2}^{(k)}) + 3(m-2\ell+4)\{5(m-2\ell)^2+7(m-2\ell)+6\}(\mu_{\ell-1}^{(k)}+\mu_{\ell+1}^{(k)})$$
$$-4(m-2\ell)\{5(m-2\ell)^2+21(m-2\ell)+28\}\mu_\ell^{(k)} \Big] > 0 \qquad (\ell \geqq 4),$$

$$\sum_{k=1}^{r} \tau_k \Big[\sum_{j=0}^{2\ell} \Big\{ \sum_{\alpha=0}^{i} \sum_{p=0}^{2\alpha} (-1)^p N_k \binom{2\alpha}{p}\binom{2\ell-2\alpha}{j-2\alpha+p}\binom{i}{\alpha}\binom{m-i}{\alpha} \Big\} \mu_j^{(k)}$$
$$- \binom{m}{i} \Big\{ \sum_{j=0}^{2\ell} \sum_{p=0}^{i} (-1)^p \binom{i}{p}\binom{2\ell-i}{j-i+p} \mu_j^{(k)} \Big\}^2 \Big] > 0 \qquad (1 \leqq i \leqq \ell)。$$

REFERENCES

[1] Shirakura, T. (1979). Optimal balanced fractional 2^m factorial designs of resolution IV derived from balanced arrays of strength four. *J. Japan Statist. Soc.* 9, 19-27.

[2] Shirakura, T. and Kuwada, M. (1975). Note on balanced fractional 2^m factorial designs of resolution $2\ell+1$. *Ann. Inst. Statist. Math.* 27, 377-386.

[3] Srivastava, J.N. and Chopra, D.V.(1971). Balanced optimal 2^m fractional factorial designs of resolution V, $m \leq 6$. *Technometrics* 13, 257-269.

[4] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1975). Balanced arrays of strength 2ℓ and balanced fractional 2^m factorial designs. *Ann. Inst. Statist. Math.* 27, 143-157.

[5] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1976). Characteristic polynomials of the information matrices of balanced fractional 2^m factorial designs of higher $(2\ell+1)$ resolution. *"Essays in Probability and Statistics"* (S. Ikeda et al., Eds.), birthday volume in honor of Professor J. Ogawa, Shinko Tsusho Co. Ltd., Tokyo, 73-94.